Ex.6 设

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求(1) A^{-1}; (2) $(A^*)^{-1}$; (3) A^*; (4) 行列式$|A|$ 中所有元素的代数余子式之和.

解: 根据代数余子式的定义, 有

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=6.\quad \text{所以}, A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$|A|=4$. 根据矩阵性质, $AA^*=A^*A=|A|E$ 得

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

行列式$|A|$ 中所有元素的代数余子式之和为24.